

李建平, 丁瑞强. 2009. 混沌系统单变量可预报性研究 [J]. 大气科学, 33 (3): 551–556. Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2009. Studies of predictability of single variable from multi-dimensional chaotic dynamical system [J]. Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese), 33 (3): 551–556.

# 混沌系统单变量可预报性研究

李建平 丁瑞强

中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

**摘要** 对于  $n$  维的混沌系统, 不同变量的可预报性是不同的。为了研究混沌系统中单个变量的可预报性, 本文在以前提出的混沌系统整体的非线性局部 Lyapunov 指数基础上 (李建平等, 2006), 引入了单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量, 进一步完善了非线性误差增长理论。通过应用到几个混沌个例, 结果表明单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量可以用来定量地研究多维混沌系统中不同变量的可预报性, 系统不同变量的可预报性之间不是相互独立的, 而是单个变量的可预报期限与系统整体的可预报期限之比都近似保持一个常数, 但各个变量的常数值有所不同。

**关键词** 可预报性 Lyapunov 指数 混沌 Henon 映射 Lorenz 系统

**文章编号** 1006-9895 (2009) 03-0551-06 **中图分类号** P456 **文献标识码** A

## Studies of Predictability of Single Variable from Multi-dimensional Chaotic Dynamical System

LI Jianping and DING Ruiqiang

*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

**Abstract** To study the atmospheric predictability from the view of nonlinear error growth dynamics, a new approach, the nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE), is introduced by the authors recently. The NLLE and its derivatives can be used to quantify the predictability of chaotic dynamical systems. For an  $n$ -dimensional chaotic dynamical system, the predictability of its different variables is proved to be different. To quantify the predictability of single variable of multi-dimensional chaotic dynamical system, the nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE) of single variable is introduced, which is based on the definition of the NLLE of the whole system. Taking the Henon map and Lorenz system as examples, the results indicate that the NLLE of single variable and its derivatives can be used to measure quantitatively the predictability of different variables. In addition, it is not independent among the predictability of different variables. The ratio of the predictability limit of single variable to that of the whole system nearly keeps constant with the change of magnitude of initial error. However, the constant values for different variables are different.

**Key words** predictability, Lyapunov exponent, chaos, Henon map, Lorenz system

**收稿日期** 2007-10-17, 2008-01-21 收修定稿

**资助项目** 国家重点基础研究发展规划项目 2006CB403600, 国家自然科学基金资助项目 40675046、40805022

**作者简介** 李建平, 男, 1969 年出生, 博士, 研究员, 主要从事事气候动力学、季风、可预报性、环准模、数值计算等方面的研究。

E-mail: ljp@lasg.iap.ac.cn

## 1 引言

对于一个混沌系统来说, 由于对初始条件的敏感性, 存在着可预报期限。如何定量地估计混沌系统的可预报期限虽然比较困难, 却有非常重要的现实意义 (May, 1976; Parmer, 1999; 丑纪范, 2002; 段晚锁等, 2006)。在混沌动力系统理论分析中, 最大 Lyapunov 指数 (后文也称为全局 Lyapunov 指数) 可以刻画混沌系统预报误差的整体 (长期) 平均增长速率, 其倒数过去被定义为最大可预报时间长度 (Eckmann et al., 1985; Fraedrich, 1987, 1988)。后来, 为了度量相空间的局部可预报性, 在全局 Lyapunov 指数基础上, 引入了局部或有限时间 Lyapunov 指数 (Nese, 1989; Kazantsev, 1999; Ziemann et al., 2000)。但是, 这种局部 Lyapunov 指数本质上与全局 Lyapunov 指数相同, 都是建立在无穷小误差动力学基础上的, 属于线性误差增长理论的范畴。须知, 如果一个误差保持无穷小, 它就不可能有可预报期限。为了确定可预报期限, 不能只局限于误差增长的线性行为, 还应包括误差增长的非线性行为。针对线性误差增长理论的局限性, 我们引入了非线性局部 Lyapunov 指数的概念 (李建平等, 2006; Chen et al., 2006; Ding et al., 2007; 丁瑞强等, 2007; Li et al., 2008), 发展了非线性误差增长理论, 其研究结果表明: 对于一般的混沌系统, 非线性误差增长理论能够有效地确定不同初始大小误差的可预报期限, 较线性理论有明显的优越性, 更适合于可预报性的研究。

我们以前定义的非线性局部 Lyapunov 指数都是对混沌系统整体而言, 误差是作为向量模的形式表示的, 对一个  $n$  维混沌系统来说, 即表示在  $n$  维相空间中初始误差有限时间内的平均非线性增长率。应该注意到, 多维混沌系统中单个变量的变化也是非规则的, 叠加在上面的初始小误差随时间的演化也会放大, 因此也存在可预报期限, 并且单个变量的可预报期限可能与系统整体的不同。以大气为例, 不同的变量例如气温、位势高度、降水等有不同的可预报性。有时我们关心的不是系统整体的可预报性, 而是单个变量的可预报性, 那么如何定量地确定混沌系统单个变量的可预报期限? 混沌系统单个变量与系统整体可预报期限的关系又如何?

要回答这些重要的问题就需要引入针对单个变量可预报性研究的动力特征量。对单变量时间序列进行预测, 过去都基于传统的统计理论, 但是传统统计理论不仅无法满意地刻画系统的动力行为, 而且较多地采用线性模式, 最多只能定性地判断可预报时间的长短, 用其研究可预报性也存在着很大的问题 (林振山, 2003)。本文在作者以前提出的混沌系统整体非线性局部 Lyapunov 指数基础上, 引入了单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量, 通过应用到几个混沌个例, 结果表明, 单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量可以用来定量地研究多维混沌系统中不同变量的可预报性, 最后还探讨了混沌系统单个变量与系统整体可预报期限的关系。

## 2 非线性局部 Lyapunov 指数及混沌系统可预报期限的确定

对于一个  $n$  维非线性动力系统, 如果对其误差演化方程不作任何近似, 保留所有的非线性项, 误差演化方程的解可以从  $t=t_0$  到  $t_0+\tau$  进行数值积分, 我们可得到:

$$\delta(t_0 + \tau) = \eta(x(t_0), \delta(t_0), \tau)\delta(t_0), \quad (1)$$

其中,  $\eta(x(t_0), \delta(t_0), \tau)$  为非线性误差传播算子,  $\delta(t_0)$  为初始误差。由 (1) 式可以定义非线性局部 Lyapunov 指数:

$$\lambda(x(t_0), \delta(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|\delta(t_0 + \tau)\|}{\|\delta(t_0)\|}, \quad (2)$$

这里  $\lambda(x(t_0), \delta(t_0), \tau)$  不仅依赖于相空间中参考轨道的初始状态  $x(t_0)$  和演化时间  $\tau$ , 还与初始误差  $\delta(t_0)$  有关, 这与 Nese(1989)、Kazantsev(1999) 与 Ziemann et al. (2000) 等人定义的局部或有限时间 Lyapunov 指数完全不同。下面为了方便, 将误差向量  $\delta(t)$  的大小表示为  $\delta(t) = \|\delta(t)\|$ 。如果要从整体上对非线性系统的动力特性进行研究, 需要引入整体系统平均的非线性局部 Lyapunov 指数:

$$\bar{\lambda}(\delta(t_0), \tau) = \langle \lambda(x(t_0), \delta(t_0), \tau) \rangle_N, \quad (3)$$

其中,  $\langle \rangle_N$  表示  $N(N \rightarrow \infty)$  个样本的集合平均; 误差平均相对增长可以通过平均非线性局部 Lyapunov 指数获得:

$$\bar{E}(\delta(t_0), \tau) = \exp(\bar{\lambda}(\delta(t_0), \tau)\tau). \quad (4)$$

由 (2)、(3)、(4) 式可得

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\delta_i(t_0 + \tau)}{\delta_i(t_0)}\right). \quad (5)$$

对于一个混沌系统, 随着  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $\delta_1(t_0 + \tau)$ ,  $\delta_2(t_0 + \tau)$ ,  $\dots$ ,  $\delta_N(t_0 + \tau)$  相互独立, 并且收敛到同一分布, 利用我们提出的定理 (Ding et al., 2007), 可得:

$$\bar{E}(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) \xrightarrow{P} c \quad (N \rightarrow \infty), \quad (6)$$

这里,  $c$  能被看作是  $\bar{E}(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau)$  的理论饱和值; 误差增长达到饱和, 就意味着系统的初始信息全部丢失, 预测失去意义, 因此利用这个饱和值, 混沌系统的可预报期限能被定量地确定 (这里的可预报期限对应着一个平均的时间长度  $T_P$ , 超出  $T_P$  由于初始扰动在整个吸引子上的传播, 预测将完全失去意义)。

### 3 单个变量非线性局部 Lyapunov 指数及其可预报期限的确定

公式 (2) 定义的非线性局部 Lyapunov 指数都是针对整个混沌系统而言的, 误差大小是作为向量模的形式表示的。为了度量  $n$  维非线性动力系统中不同变量的误差增长和可预报性, 对于某个变量  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 其非线性局部 Lyapunov 指数可以被定义为:

$$\xi_i(\boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|\delta_i(t_0 + \tau)|}{|\delta_i(t_0)|}, \quad (7)$$

这里  $\boldsymbol{\delta}(t) = (\delta_1(t), \delta_2(t), \dots, \delta_n(t))^T$ 。同样地, 变量  $x_i$  的平均非线性局部 Lyapunov 指数和误差平均相对增长可以通过对不同的初始状态进行整体系统平均获得:

$$\bar{\xi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = \langle \xi_i(\boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) \rangle_N, \quad (8)$$

$$\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = \exp(\bar{\xi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau)\tau). \quad (9)$$

由 (7)、(8)、(9) 式可得:

$$\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln \frac{|\delta_{ij}(t_0 + \tau)|}{|\delta_{ij}(t_0)|}\right). \quad (10)$$

对于变量  $x_i$  相同大小的初始误差  $\delta_i(t_0)$ , 我们有

$$\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = \left(\prod_{j=1}^N |\delta_{ij}(t_0 + \tau)|\right)^{1/N} / |\delta_i(t_0)|. \quad (11)$$

对于一个混沌系统, 随着  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $|\delta_{i1}(t_0 + \tau)|$ ,  $|\delta_{i2}(t_0 + \tau)|$ ,  $\dots$ ,  $|\delta_{iN}(t_0 + \tau)|$  也将相互独立, 并且将收敛到如下形式的同一分布:

$$f(x) = \begin{cases} p(x), & \varepsilon \leq x \leq a, \\ 0, & x < \varepsilon \text{ 或 } x > a, \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\varepsilon$  是一个任意小的正数,  $a$  是一个正常数 (由于混沌吸引子被限制在有限的范围内, 这里  $\varepsilon$  和  $a$  可以理解为变量  $x_i$  的误差大小取值的上限和下限),  $p(x)$  为定义在  $[\varepsilon, a]$  区间上的连续函数。类似于公式 (6) 的证明, 我们同样也可以证明单个变量  $x_i$  的误差平均相对增长  $\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau)$  的饱和性质。下面给出证明过程。

令  $Z = \left(\prod_{j=1}^N |\delta_{ij}(t_0 + \tau)|\right)^{1/N}$ , 对  $Z$  两边取对数, 得

$$\ln Z = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \ln |\delta_{ij}(t_0 + \tau)|.$$

因为  $|\delta_{ij}(t_0 + \tau)|$  独立同分布, 所以  $\ln |\delta_{ij}(t_0 + \tau)|$  也独立同分布。又

$$E(\ln |\delta_{ij}(t_0 + \tau)|) = \int_{\varepsilon}^a \ln x \cdot p(x) dx.$$

$\ln x \cdot p(x)$  在  $[\varepsilon, a]$  区间上连续可积, 则得到

$$E(\ln |\delta_{ij}(t_0 + \tau)|) = \int_{\varepsilon}^a \ln x \cdot p(x) dx = b,$$

其中,  $b$  为依赖于  $p(x)$  的一个常数; 当  $N \rightarrow \infty$  时, 由辛钦大数定律得

$$\ln Z \xrightarrow{P} b. \quad (13)$$

即有  $Z \xrightarrow{P} e^b$ , 因此对于  $\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) = Z / |\delta_i(t_0)|$ , 最后可以得到

$$\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau) \xrightarrow{P} e^b / |\delta_i(t_0)| = c_i, \quad (14)$$

这里,  $c_i$  能被看作是  $\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), \tau)$  的理论饱和值 (对于不同的变量, 由于最终的误差分布不同, 理论饱和值也有所不同), 利用这个饱和值, 变量  $x_i$  的可预报期限能被定量地确定。

## 4 实例研究

### 4.1 Henon 映射

Henon 映射的方程为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}, \quad (15)$$

其中,  $a, b$  为控制参数, 这里选取  $a=1.4, b=0.3$ 。图 1 给出了 Henon 映射  $x$  变量和  $y$  变量的平均非线性局部 Lyapunov 指数  $\bar{\xi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), n)$  和误差平均相对增长的自然对数  $\bar{\Phi}_i(\boldsymbol{\delta}(t_0), n)$  随时间步长  $n$  的变化, 其中  $i=1, 2, \delta_1(t_0)=10^{-6}, \delta_2(t_0)=10^{-6}$ 。可以看出, 在给定相同的初始误差条件下, Henon 映射  $x$  变量和  $y$  变量的误差增长并不相同,  $x$  变量

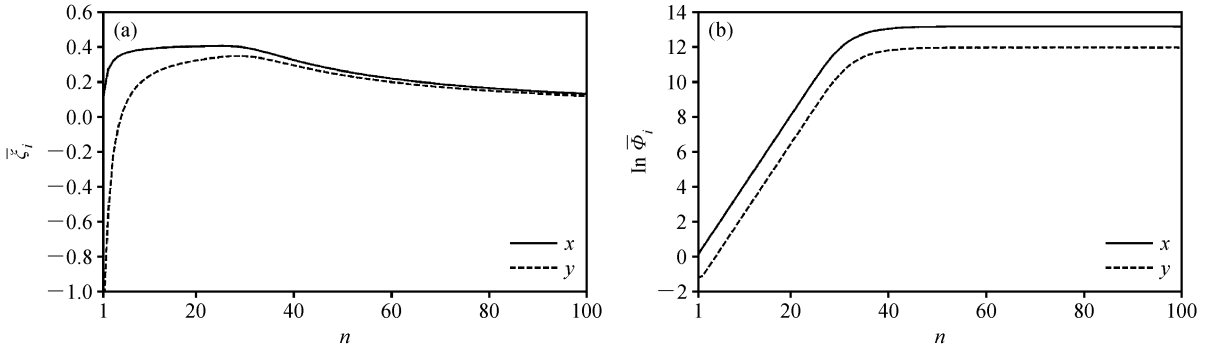


图 1 Henon 映射  $x$  变量和  $y$  变量的平均非线性局部 Lyapunov 指数  $\bar{\xi}_i(\delta(t_0), n)$  (a) 以及误差平均相对增长  $\bar{\Phi}_i(\delta(t_0), n)$  的自然对数 (b) 随时间步长  $n$  的变化

Fig. 1 For the different variables of Henon map, (a) the mean nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE)  $\bar{\xi}_i(\delta(t_0), n)$  and (b) the logarithm of the corresponding mean relative growth of initial error (RGIE)  $\bar{\Phi}_i(\delta(t_0), n)$  as a function of time step  $n$

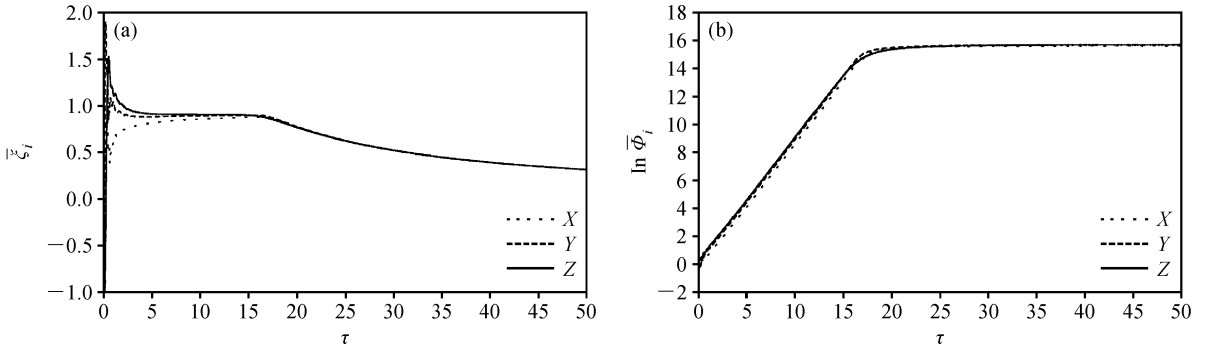


图 2 Lorenz 系统  $X$  变量、 $Y$  变量和  $Z$  变量的平均非线性局部 Lyapunov 指数  $\bar{\xi}_i(\delta(t_0), \tau)$  (a) 以及误差平均相对增长  $\bar{\Phi}_i(\delta(t_0), \tau)$  的自然对数 (b) 随时间  $\tau$  的变化

Fig. 2 For the different variables of Lorenz system, (a) the mean nonlinear local Lyapunov exponent (NLLE)  $\bar{\xi}_i(\delta(t_0), \tau)$  and (b) the logarithm of the corresponding mean relative growth of initial error (RGIE)  $\bar{\Phi}_i(\delta(t_0), \tau)$  as a function of time  $\tau$

的误差一开始就表现为增长, 而  $y$  变量的误差初始减小,  $x$  变量的误差增长率要比  $y$  变量的大, 但随着误差的增长, 两者的误差增长率都要趋向于 0 (图 1a), 相应地误差增长最终达到饱和, 因此也都存在着可预报期限 (图 1b)。与以前的工作一致, 如果将初始误差演化到误差饱和值的 99% 时所对应的时间定义为可预报期限 (Chen et al., 2006; Ding et al., 2007; 丁瑞强等, 2007), 可以得到, 在  $\delta_1(t_0)=10^{-6}$ ,  $\delta_2(t_0)=10^{-6}$  时,  $x$  变量和  $y$  变量的可预报期限分别为  $n=40$  和  $n=42$ , 两者有所差别。

#### 4.2 Lorenz 系统

Lorenz 系统的方程为:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases} \quad (16)$$

这里, 我们选取参数值  $\sigma=10$ ,  $r=28$ ,  $b=8/3$ 。图

2 给出了 Lorenz 系统  $X$  变量、 $Y$  变量和  $Z$  变量的平均非线性局部 Lyapunov 指数  $\bar{\xi}_i(\delta(t_0), n)$  和误差平均相对增长的自然对数  $\bar{\Phi}_i(\delta(t_0), n)$  随时间步长  $n$  的变化, 其中,  $i=1, 2, 3$ ,  $\delta_1(t_0)=10^{-6}$ ,  $\delta_2(t_0)=10^{-6}$ ,  $\delta_3(t_0)=10^{-6}$ 。在给定相同的初始误差条件下, Lorenz 系统三个变量经过最初阶段的适应调整后, 误差增长率比较相近, 相应地, 误差平均相对增长也差别很小。 $Z$  变量刚开始一段时间的误差增长率相对另外两个变量较大, 但是随着  $\tau$  的增大, 特别是误差增长进入非线性阶段后,  $Z$  变量的误差增长率下降的比  $X$  和  $Y$  变量快 (图 2a), 最后达到饱和的时间反而最长 (图 2b)。这充分说明了在可预报性研究中引入非线性作用的重要性。在  $\delta_1(t_0)=10^{-6}$ ,  $\delta_2(t_0)=10^{-6}$ ,  $\delta_3(t_0)=10^{-6}$  时, 可以得到变量  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  的可预报期限分别为  $t=21.0$ 、 $t=21.0$  和  $t=23.5$ 。

### 5 混沌系统单个变量与整个系统的可预报期限之间的关系

上面为了便于比较混沌系统不同变量可预报性的差别，对 Henon 映射和 Lorenz 系统的每个变量都给了相同大小的初始误差。实际上，对于整个系统来说，由于不同方向的初始误差向量随着时间的演化很快都将落到最快增长方向上，而在相空间中误差最快增长方向在单个变量方向上的投影将决定这个变量误差的演化，因此系统不同变量的误差增长和可预报性可能并不是各自独立的，而是与系统整体的误差增长和可预报性有某种联系。

为了考察混沌系统单个变量可预报性与系统整体的可预报性的关系，图 3 和图 4 分别给出 Henon 映射和 Lorenz 系统中单个变量的可预报期限与系

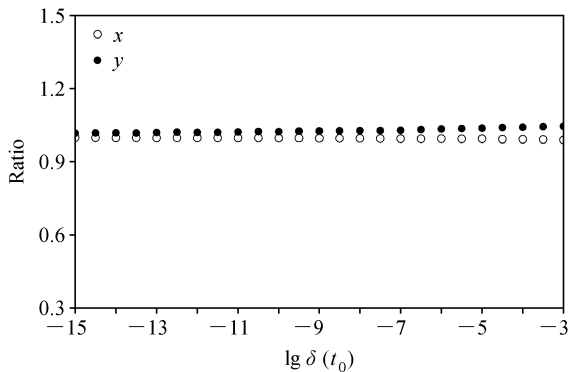


图 3 Henon 映射的  $x$  变量、 $y$  变量分别对应的可预报期限与系统整体可预报期限之比随初始误差向量大小的变化

Fig. 3 The ratio of the predictability limit of different variables  $x$  and  $y$  to that of the whole system as a function of  $\delta(t_0)$  in the Henon map

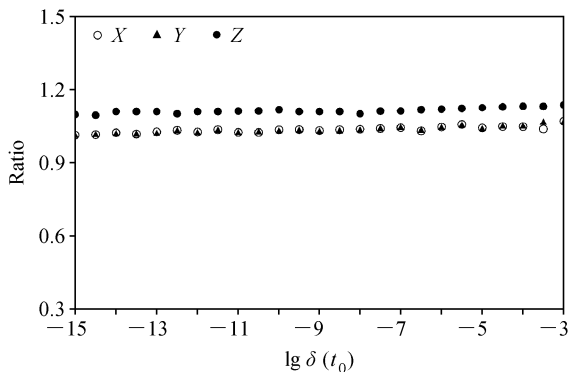


图 4 同图 3，但为 Lorenz 系统的  $X$  变量、 $Y$  变量、 $Z$  变量

Fig. 4 Same as Fig. 3, but for three different variables  $X$ ,  $Y$  and  $Z$  of Lorenz system

统整体可预报期限之比随初始误差向量大小的变化。从图 3 和图 4 可以看出，随着初始误差向量大小的变化（误差向量的方向不变），Henon 映射和 Lorenz 系统中单个变量的可预报期限与系统整体的可预报期限之比都近似保持一个常数，但各个变量的常数值有一定差异。例如对于 Henon 映射，初始误差向量的大小从  $10^{-15}$  变化到  $10^{-3}$ ， $x$  变量可预报期限与系统整体可预报期限之比都近似为 0.99， $y$  变量的近似为 1.03，两者几乎相同；对于 Lorenz 系统，初始误差向量的大小从  $10^{-15}$  变化到  $10^{-3}$ ， $X$  变量可预报期限与系统整体可预报期限之比都近似为 1.02， $Y$  变量的也近似为 1.02，与  $X$  变量的几乎没有差别，而  $Z$  变量的近似为 1.11。这些数值结果表明，混沌系统单个变量可预报期限与系统整体的可预报期限似乎存在很好的关系，它们之间的比值不随初始误差向量大小而变化。这是非常重要的关系，根据这种比例关系，如果我们预先得到系统整体的可预报期限，则系统不同变量的可预报期限可以容易获得；反过来，如果我们预先得到系统某一变量的可预报期限，则系统整体以及其他变量的可预报期限也可以得到。这种近似固定的比例关系也许可以说明，误差最快增长方向在各个分量上的投影就系统的全局平均来说其比例可能是固定的。当然，这只是一种推测，这种统计关系还需要在理论上进一步给予证明。

### 6 总结和讨论

如何定量地研究多维混沌系统中不同变量的可预报性，是前人讨论较少的研究课题。本文在李建平等（2006）、Ding et al.（2007）、丁瑞强（2007）提出的混沌系统整体非线性局部 Lyapunov 指数基础上，引入了单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量，进一步完善了非线性误差增长理论。对于一般的多维混沌系统，利用单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量可以定量地确定混沌系统单个变量的可预报期限，结果表明系统不同变量的可预报性之间不是相互独立的，而是单个变量的可预报期限与系统整体的可预报期限之比都近似保持一个常数，但各个变量的常数值有所不同。这为我们定量地研究混沌系统单个变量的可预报性提供了新的途径，使我们可以研究感兴趣的单个物理场的可预报性问题。

对于较复杂的非线性系统,如天气和气候系统,我们利用单变量的非线性局部 Lyapunov 指数及其相关统计量,结合实际资料,定量估计了 500 hPa 位势高度场、温度场、纬向风场、经向风场以及垂直速度场等不同物理量可预报期限的空间分布特征(丁瑞强,2007;李建平等,2008)。另外,关于实际大气中不同物理量可预报期限与大气系统整体的可预报期限的关系,是否如同 Henon 映射和 Lorenz 系统那样近似保持一个常数比值关系,是将来需要利用大气数值模式进一步研究的问题。

### 参考文献 (References)

- Chen Baohua, Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2006. Nonlinear local Lyapunov exponent and atmospheric predictability research [J]. *Science in China (D)*, 49 (10): 1111–1120.
- 丑纪范. 2002. 大气科学中的非线性与复杂性 [M]. 北京: 气象出版社, 104–112. Chou Jifan. 2002. Nonlinearity and Complexity in the Atmospheric Sciences (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorological Press, 104–112.
- Ding Ruiqiang, Li Jianping. 2007. Nonlinear finite-time Lyapunov exponent and predictability [J]. *Phys. Lett. A*, 364: 396–400.
- 丁瑞强, 李建平. 2007. 误差非线性的增长理论及可预报性研究 [J]. *大气科学*, 31 (4): 571–576. Ding Ruiqiang, Li Jianping. 2007. Nonlinear error dynamics and predictability study [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 31 (4): 571–576.
- 丁瑞强. 2007. 非线性误差增长理论与可预报性研究 [D]. 中国科学院大气物理研究所博士学位论文, 75–95. Ding Ruiqiang. 2007. Nonlinear error dynamics and predictability study [D]. Ph. D. dissertation (in Chinese), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, 75–95.
- 段晚锁, 穆穆. 2006. 用非线性最优化方法研究 El Niño 可预报性的进展与前瞻 [J]. *大气科学*, 30 (5): 759–766. Duan Wansuo, Mu Mu. 2006. Advance and prospect of the studies of El Niño predictability by nonlinear optimization method [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 30 (5): 759–766.
- Eckmann J P, Ruelle D. 1985. Ergodic theory of chaos and strange attractors [J]. *Rev. Mod. Phys.*, 57: 617–656.
- Fraedrich K. 1987. Estimating weather and climate predictability on attractors [J]. *J. Atmos. Sci.*, 44: 722–728.
- Fraedrich K. 1988. El Niño/Southern Oscillation predictability [J]. *Mon. Wea. Rev.*, 116: 1001–1012.
- Kazantsev E. 1999. Local Lyapunov exponents of the quasi-geostrophic ocean dynamics [J]. *Appl. Math. Comp.*, 104: 217–257.
- 李建平, 丁瑞强, 陈宝花. 2006. 大气可预报性研究的回顾与展望 [M]. 北京: 气象出版社, 96–104. Li Jianping, Ding Ruiqiang, Chen Baohua. 2006. Review and Prospect on the Predictability Study of the Atmosphere (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorology Press, 96–104.
- 李建平, 丁瑞强. 2008. 短期气候可预报性的时空分布 [J]. *大气科学*, 32 (4): 975–986. Li Jianping, Ding Ruiqiang. 2008. Temporal-spatial distributions of predictability limit of short-term climate [J]. *Chinese Journal of Atmospheric Sciences (in Chinese)*, 32 (4): 975–986.
- Li Jianping, Wang S. 2008. Some mathematical and numerical issues in geophysical fluid dynamics and climate dynamics [J]. *Commun. Comput. Phys.*, 3 (4): 759–793.
- 林振山. 2003. 非线性科学及其在地学中的应用 [M]. 北京: 气象出版社, 89–95. Lin Zhenshan. 2003. Nonlinear Science and Its Application in Geoscience (in Chinese) [M]. Beijing: China Meteorological Press, 89–95.
- May R M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics [J]. *Nature*, 261: 459–467.
- Nese J M. 1989. Quantifying local predictability in phase space [J]. *Physica D*, 35: 237–250.
- Palmer T N. 1999. A nonlinear dynamical perspective on climate prediction [J]. *J. Climate*, 12: 575–591.
- Ziemann C, Smith L A, Kurths J. 2000. Localized Lyapunov exponents and the prediction of predictability [J]. *Phys. Lett. A*, 4: 237–251.