

气候均值突变的检测方法

李建平¹⁾ 丑纪范²⁾ 史久恩²⁾

(1) 兰州大学大气科学系, 兰州 730000;

2) 北京气象学院, 北京 100081)

摘要 本文是气候突变统计方法研究的第二部分, 主要讨论均值突变的各种检测方法, 指出 Mann-Kendall 方法的严重缺陷, 较详细的讨论了连续滑动 t-检验法、最小二乘法和极大似然法。研究结果表明, 连续滑动 t-检验法是一种稳定、客观、直观简明的检测方法。此外, 给出几种多元均值突变的检测方法, 即 T^2 -检验法, M-距离法和最小二乘法。

关键词 气候突变; 均值突变; 连续滑动 t-检验法

作者在文献[1]中给出了气候突变的完备定义、类型及各类型的数学提法, 本文是研究的继续, 讨论气候均值突变的检测方法。均值突变是气候突变中最常见也是研究最多的, 已有如下检测方法: ① 低通滤波法; ② 两样本 t-检验法; ③ Cramer 法; ④ 滑动 t-检验法; ⑤ Yamamoto 法^[2]; ⑥ Mann-Kendall 法^[3~5]; ⑦ 连续滑动 t-检验法^[7~9]; ⑧ 最小二乘法^[10]; ⑨ 极大似然法^[11]。方法①~⑤较普通, 故本文主要讨论后几种方法, 并以一元情况为主。

1 简要述评

文献[6]对上述方法①~⑥作了介绍, 本文不再叙述。只是对它们的功效作简单评述:

1. 低通滤波法。只能对长期变化的趋势进行描述, 而不能直接给出哪点附近产生突变。它在判断突变点时主观性强, 缺乏可信度, 因而往往得不到预期的效果。

2. 两样本 t-检验法。这种方法是将有序样本集 X 分解为两个子样集 X_1 、 X_2 。然后检验两个子样本平均值是否有显著性差异。这种方法的缺点是: ① 划分子样的样本长度具有较大的人为性; ② 它与变点问题有一根本差别是: 此法中的突变点已知, 而变点问题中突变点位置未知—变点问题的要点正在于对突变点是否存在及其位置作出推断。

3. Cramer 法、滑动 t-检验法、Yamamoto 法。这三种方法基本原理是一致的。它们较两样本 t-检验法有所改进, 即将突变点位置当作是未知的。它们的不足之处在于: 不能给出突变

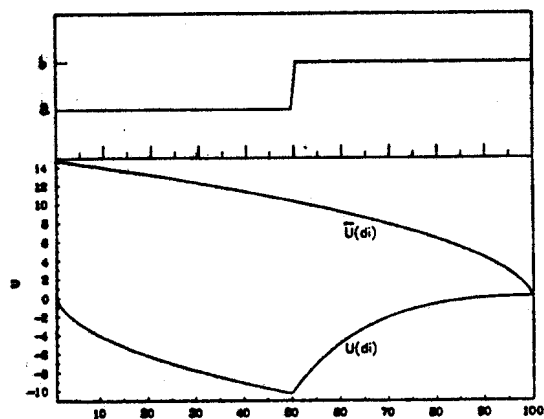


图1 存在一次突变的序列及 Mann-Kendall 法计算图

点前(或突变点后)的时间是否是同一性质或同一性值时期的确切时段。

4. Mann-Kendall 法。此法被许多作者^[3~6]用来研究不同气候的突变问题,并认为它检测范围宽、定量化程度高。作者在研究中发现此法存在严重问题,并从理论上证明形如阶梯函数的确定存在一次突变的序列, Mann-Kendall 法是不能将突变点检测出来的^[8~9]。因此,它不能较好地用于检测气候突变。为简明说明此问题,这里给出一个长度 $n=100$, 突变点在 50、51 之间的阶梯序列的例子(如图 1)。此序列满足文献^[8~9]定理 3 结论(4), $U(d_i)$ 与 $\bar{U}(d_i)$ 存在一个交点, 交点在 99、100 之间, 而不在 50、51 之间。计算结果证实了这一点(见图 1)。

2 连续滑动 t -检验法

考虑到气候突变的定义及变点问题的本质, 本文提出一种检测均值突变方法——连续滑动 t -检验法^[7~9]。方法的着眼点是: ① 突变点位置和个数当作是未知的并能对此作出推断; ② 能确定出同一性质状态的确切时段; ③ 能确定出各气候阶段性质间的关系。

设一气候序列为 x_1, x_2, \dots, x_n , 为检验其是否存在突变及突变点的位置和个数, 对它进行连续考察, 即将它分解为连续的 $(n-a+1)$ 个时段 $X_1, X_2, \dots, X_{n-a+1}$, 其中

$$X_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+a-1}), i = 1, 2, \dots, n-a+1 \quad (1)$$

a 称为观察的时间尺度, 它不是某个气候平衡态的持续时间, 也不是平衡态之间的过渡时间, 它的取值对应着何种尺度气候变化。因此, 变换尺度 a 可使对各种时间尺度的气候变化进行研究。这连续的 $(n-a+1)$ 个时段 $X_i (i=1, \dots, n-a+1)$ 的平均值 \bar{X}_i 正好是原序列以时间尺度为 a 的滑动平均值。假设 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2) (i=1, \dots, n-a+1)$, 且这 $(n-a+1)$ 个总体平均值无显著性差异, 即假设 $H_0: \mu_i - \mu_j = 0$, 定义如下统计量:

$$t_{ij} = \sqrt{a-1} (X_i - X_j) / S_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-a+1 \quad (2)$$

式中 $X_i = \frac{1}{a} \sum_{t=i}^{i+a-1} x_t, S_{ij}^2 = S_i^2 + S_j^2, S_i^2 = \frac{1}{a} \sum_{t=i}^{i+a-1} (x_t - \bar{x}_i)^2$ 为第 i 个时期的方差。显然, $t_{ij} \sim t(2a-2)$ 分布。给定信度 α , 若 $|t_{ij}| \geq t_\alpha$, 则否定原假设 H_0 , 说明第 i 个时期 X_i 与第 j 个时期 X_j 有显著性差异。将所有的 t_{ij} 列成一个矩阵:

$$T = (T_{ij})_{(n-a+1) \times (n-a+1)} = \begin{cases} 0, & |t_{ij}| < t_\alpha \\ 1, & |t_{ij}| \geq t_\alpha \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n-a+1 \quad (3)$$

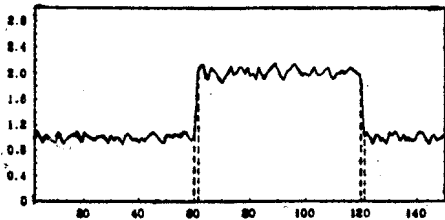


图 2 一个存在两次突变的序列

显然 T 为一对称阵。然后, 再将 T 阵转化为直观图(如图 2 中序列的连续滑动 t -检验法结果图 3(a)、(c))。图中点 (X_i, X_j) 上的值为 T_{ij} , 空白则表示其值为 0; 阴影则表示其值为 1, 即达到了显著水平。如果序列存在一次突变, 则矩阵 T 可分为 4 个子块,

$$T = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中子块 Γ_{11}, Γ_{22} 都是零方阵, 分别代表两种性质的气候状态; $\Gamma_{21} = (\Gamma_{12})'$ 是元素均为 1 的方阵, '表示转置。为便于看清序列的趋势及其各阶段的具体性质, 将原序列的 a 点滑动平均序列附在连续滑动 t -检验结果图下(如图 3(b)、(d))。

为说明如何使用和分析此方法的结果, 举出一个明显存在两次突变的序列($n=150$), 如图 2。它在 60~61 及 120~121 间发生突变。图 3 是 $a=5$ 及 $a=21$ 时连续滑动 t -检验法的结果

(均达到 99.9% 的信度水平)。先分析 $a=5$ 时的情形, 由图 3(a)、(b) 知:

① 59 以前的所有尺度 $a=5$ 的时段之间都无显著性差异, 说明它们是同一性质的状态;

② 62~119 的所有尺度 $a=5$ 的时段间都无显著性差异, 说明它们是同一性质的状态;

③ 在 59 以前的和 62~119 的所有以尺度 $a=5$ 的时段之间均有显著性差异, 说明它们是属于不同性质的状态。由于过渡期 59~62 远小于前后两个不同性质状态的持续时间, 故得在 60~61 之间发生了一次突变。

④ 同理, 知另一突变点在 120~121 之间。

⑤ 序列分为 3 个阶段, 即 1~59、62~119 和 122~150。它们属于两种性质, 第一、三个阶段为同一种性质, 第二个阶段为另一种。

当 $a=21$ 时(见图 3(c)、(d)), 按上述分析可得到同样的结论。以上表明:

① 连续滑动 t -检验法的思想是先确定出哪些时段是属于一种性质的状态, 哪些时段是另一种性质的状态; 若相邻两种基本状态的转换期(过渡期)远小于各自状态的持续期, 则转换是突变的; 且同一性质状态的时期和突变点的位置事先是未知的, 它是通过以尺度 a 进行连续考察得到的; 这与气候突变的定义和变点问题的本质相吻合;

② 连续滑动 t -检验法对突变点的检测和序列阶段的划分是比较稳定的。

在实际中观察尺度 a 的选取由所要研究的气候尺度而定。若研究 10~100 年际尺度的变化, 一般选取 $a=11\sim31$ 即可。

连续滑动 t -检验法有如下优点: ① 能对系统所发生的突变进行全面的检测; ② 克服了两样本 t -检验法选择样本长度的人为性, 客观性强, 判断直观简便; ③ 能清楚地确定出平衡态的持续时间; ④ 能对系统长期变化的不同阶段进行客观的划分及各阶段性质间的关系; ⑤ 能清楚地确定系统变化各阶段间的转换性质。

3 最小二乘法

对文献[1]中模型(2), 其最小二乘法是求如下目标函数

$$T_s = T(m_1, \dots, m_q) = \sum_{j=1}^{q+1} \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j-1} (x_i - \bar{x}_j)^2 \quad (5)$$

在 $1 \leq m_1 < \dots < m_q \leq n$ 范围内达到最小值的问题。此处, 令 $m_0 = 1, m_{(q+1)} = n + 1, \bar{x}_j = (x_{m_{j-1}} + x_{m_{j-1}+1} + \dots + x_{m_j-1}) / (m_j - m_{j-1})$ 为第 j 段内 x 观测值的平均。此法的直观意

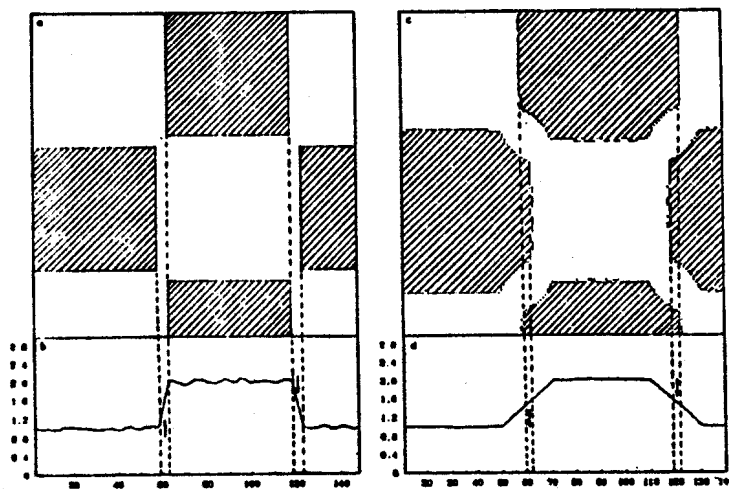


图 3 图 2 所给序列的连续滑动 t -检验结果(达到 99.9% 的信度)
(a) 观察尺度 $a=5$; (b) 5 点滑动平均曲线;
(c) 观察尺度 $a=21$; (d) 21 点滑动平均曲线。

义是较为清楚的,即将序列分成 $q+1$ 段后,每段内的数据比较接近,各段的离差平方和最小。此法最大优点是不须对模型中的随机误差的分布有特定的假设,使式(5)达到最小值的算法可采用有序序列的最优分割法(即 Fisher 法)或逐步调整法或逐次二分法。在分段较多时,前者比后两者计算速度快得多,但其要求的计算机存储单元也较多。

在计算式(5)前,首先进行“变点有无”的检验,方法见文献[10]。若检验有突变存在,并假定最多有 q 次突变(q 只是一个设定的上限),那么突变次数的选定采用如两种方式:

方式1,由式(5)有 $T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_q$, ① 方法1:如果从 T_1 到 T_k ($1 \leq k \leq q$) 下降较大而从此开始变为比较平缓,则取突变次数为 k ,使 T_k 最小化的 m_1, \dots, m_k 即为突变点位置的估计; ② 方法2:考虑 T_k 与 T_q 之比, T_k/T_q 不小于1,可取一个略大于1的数,如1.1,取最大的 k 使 $T_k/T_q \geq 1.1$,此 k 即突变次数的估计。

方式2,因最多有 q 次突变,则原序列分成 $q+1$ 段,段与段之间的差别达到最大,而每段内的数据比较均匀。因此,通过反映组内差与组间差的统计量可推断突变次数。令各段的均值为 \bar{x}_i ($i=1, \dots, q+1$), \bar{x} 为 x_1, x_2, \dots, x_n 的均值, $n_i = m_i - m_{(i-1)}$ 为第 i 段数据的个数(显然 $n_1 + \dots + n_{(q+1)} = n$),则统计量

$$F_q = \left[\sum_{i=1}^{q+1} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 / q \right] / [S / (n - q - 1)] \quad (6)$$

反映了组内差与组间差的比,它越大分段的统计意义越明显,其中 $S = S_1 + \dots + S_{(q+1)}$, S_i 为第 i 段数据的方差。① 方法1:算出 $F_1, F_2, \dots, F_{(n-2)}$,找 k 使 $F_k = \max F_i$ ($2 \leq i \leq n-2$),则 k 为突变次数的估计; ② 方法2:因 F_q 服从自由度为 $(q, n-q-1)$ 的 F -分布,故对 $F_1, \dots, F_{(n-2)}$ 分别作 F -检验,给定信度 α ,考察比值 $G_i = F_i / F_{\alpha}(q, n-i-1)$, $i = 1, \dots, n-2$,找 k 使 $G_k = \max G_i$ ($2 \leq i \leq n-2$),则 k 为突变次数的估计。这两种方法的统计意义均十分明显。

4 极大似然法

设序列 x_1, \dots, x_n 独立且 $x_i \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, $i = 1, \dots, m-1$; $x_i \sim N(a_2, \sigma_2^2)$, $i = m, \dots, n$, 此处 $m, a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 都未知,只在 $a_1 \neq a_2$ 时, m 才算作是突变点。令似然函数为

$$f(m; a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2) = (2\pi)^{-n/2} \sigma_1^{-m+1} \sigma_2^{-n+m-1} \exp\left[-(x_i - a_1)^2 / (2\sigma_1^2) - (x_i - a_2)^2 / (2\sigma_2^2)\right] \quad (7)$$

固定 $m, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 对 a_1, a_2 求极大,为

$$g(m; \sigma_1^2, \sigma_2^2) = \left\{ (2\pi)^{-n/2} \sigma_1^{-m+1} \exp\left[-S_{1m} / (2\sigma_1^2)\right] \sigma_2^{-n+m-1} \exp\left[-S_{2m} / (2\sigma_2^2)\right] \right\} \quad (8)$$

此处 $S_{1m} = \sum_{i=1}^{m-1} (x_i - \bar{x}_{1m})^2$, $S_{2m} = \sum_{i=m}^n (x_i - \bar{x}_{2m})^2$, $\bar{x}_{1m} = \sum_{i=1}^{m-1} x_i / (m-1)$, $\bar{x}_{2m} = \sum_{i=m}^n x_i / (n-m+1)$, 固定 m 对 σ_1^2, σ_2^2 求极大,为

$$h(m) = (2\pi)^{-n/2} e^{-n/2} S_{1m}^{-(m-1)/2} S_{2m}^{-(n-m+1)/2} \quad (9)$$

最后找出 m^* , 使 $h(m^*)$ 达到最大, $h(m^*) = \max h(m)$, $2 \leq m \leq n$, 则 m^* 即为突变点的估计。

对多次突变的情况,可类似一次突变,若至多可能有 q 个突变点,则可先固定变点数 j ,在恰有 j 个变点的情况下,算出似然函数最大值,记为 H_j , $j = 0, 1, \dots, q$,将有 $H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_q$ 。利用 H_j 上升的梯度情况决定变点个数的方法,与最小二乘法的作法相同。

突变点前后的方差可以不同是极大似然法的优点,但计算量较大是它的缺点。

5 多元情况

5.1 基于 T^2 统计量的检测方法

多元情况的检测方法的基本思路与一元情况大体相同,只是选用的统计量不同而已。在均值向量的假设检验中常选用 T^2 -统计量,设 p 维随机向量 X_1, X_2 独立,样本容量分别为 M, N , 且分别服从 p 元正态总体 $N_p(\mu_1, \Sigma)$ 和 $N_p(\mu_2, \Sigma)$, 这里 μ_1, μ_2 为均值向量, Σ 是两正态总体共同的正定的未知协方差阵。原假设 $H_0: \mu_1 = \mu_2$, 构造统计量

$$T^2 = (1/M + 1/N)^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' S^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \quad (10)$$

则

$$T^{*2} = (M + N - 1 - p) T^2 / [(M + N - 2) p] \sim F_{(p, M+N-1-p)} \quad (11)$$

其中 \bar{X}_1, \bar{X}_2 分别是样本 X_1, X_2 的均值向量,

$$S = \frac{1}{M + N - 2} \left(\sum_{i=1}^M (X_{1i} - \bar{X}_1)' (X_{1i} - \bar{X}_1) + \sum_{i=1}^N (X_{2i} - \bar{X}_2)' (X_{2i} - \bar{X}_2) \right) \quad (12)$$

给定信度 α , 若 $T^{*2} \geq T_{\alpha}^2$ (由 $F_{\alpha, (p, M+N-1-p)}$ 确定), 则拒绝原假设, 认为两者有显著不同。

基于 T^2 统计量我们可仿照一元情况, 有检测均值向量突变的两样本的 T^2 -检验法、滑动 T^2 -检验法、连续滑动 T^2 -检验法等。

5.2 Mahalanobis 距离法

基于 T^2 统计量的连续滑动 T^2 -检验法要检验 q 个总体中两两均值的差异, 要计算 $C_q^2 = q(q-1)/2$ 个 S 和 S^{-1} , 计算量较大。而采用 Mahalanobis 距离法只需计算一个矩阵 S 和 S^{-1} , 就可以检验出多个总体的均值之间有无显著性差异, 计算简便。设 $q (> 2)$ 个样本容量分别为 n_1 的 p 维随机变量 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})' (i = 1, \dots, q)$ 独立, 且服从 $N_p(\mu_i, \Sigma)$, 现要检验 q 个总体中两两均值是否有显著的差异。记 $n = n_1 + \dots + n_q$, 在假设 $\mu_i = \mu_j$ 之下, 统计量

$$D_{ij}^{*2} = ((n - p - q + 1) n p_j) D_{ij}^2 / [(n - q) p (n_i + n_j)] \sim F_{(p, n - p - q + 1)} \quad (13)$$

其中 $D_{ij}^2 = (\bar{X}_i - \bar{X}_j)' S^{-1} (\bar{X}_i - \bar{X}_j) \quad (i = 1, \dots, q - 1, j = i + 1, \dots, q) \quad (14)$

\bar{X}_i 为第 i 个变量的均值向量, 而

$$S = \frac{1}{n - q} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{X}_i) (x_{ij} - \bar{X}_i)' \quad (15)$$

检验可类似前面进行。

5.3 最小二乘法

$X_i (i = 1, \dots, n)$ 为有序的 p 维向量, $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})'$, 则对于均值向量的突变(如模型(2))的最小二乘法是求如下目标函数

$$T_p = T(m_1, \dots, m_p) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{m_j} \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j-1} (x_{ik} - \bar{x}_{jk})^2 \quad (16)$$

或用

$$T_p = T(m_1, \dots, m_p) = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{m_j} \sum_{i=m_{j-1}}^{m_j-1} |x_{ik} - \bar{x}_{jk}| \quad (17)$$

在 $1 \leq m_1 < \dots < m_q \leq n$ 范围内达到最小值的问题。此处, $m_0 = 1, m_{(q+1)} = n + 1, \bar{x}_{jk} = x_{m_{j-1}, k} + x_{m_{j-1}+1, k} + \dots + x_{m_j-1, k} / (m_j - m_{j-1})$ 为第 j 段内 X 观测值的第 k 个分量的均值 ($k = 1, \dots, p$)。其算法同一元情形。确定突变次数也同一元情形的两种方式一样, 只是一元

情形的方式2中的统计量F要改为如下表达式

$$F_q = \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{q+1} n_{ij} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_j)^2 / (pq) \right] / \left[S / (p(n-q-1)) \right] \quad (18)$$

其中 $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)'$ 为 X 的均值向量, $\bar{X}_i = (\bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \dots, \bar{x}_{ip})'$ 为第 i 个段内 X 的均值向量, $S = \sum \sum S_{ij}$, $S_i = (S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ip})$ 为第 i 段内 X 的变差向量。

参 考 文 献

- [1] 李建平, 丑纪范, 史久恩. 气候突变研究的统计方法(1)气候突变的完备定义和类型. 北京气象学院学报, 1996, 7~12
- [2] Yamamoto R, Iwashima T and Sanga N K. Climatic jump, a hypothesis in climate diagnosis. J. Met. Soc. Japan, Ser. II, 1985, 63, 1157~1160
- [3] Goossens Ch and Berger A. Annual and seasonal climatic variations over the Northern Hemisphere and Europe during the last century. Annales Geophysicae series B, 1986, 4, 385~400
- [4] Berger W H and Labeyrie L D. Abrupt Climatic Change—Evidence and Implications. NATO ASL Series, Series C., Mathematical and Physical Sciences, 1987, Vol. 216
- [5] 符凉斌, 王强. 南亚夏季风长期变化中的突变现象及其与全球迅速增暖的同步性. 中国科学, B 辑, 1991, (6), 666~672
- [6] 符凉斌, 王强. 气候突变的定义和检测方法. 大气科学, 1992, 16(4), 482~493
- [7] 李建平, 史久恩. 一百年来全球气候突变的检测与分析. 大气科学(增刊), 1993, 17, 132~140
- [8] 李建平. 非线性气候动力学的若干研究. 兰州: 兰州大学硕士学位论文, 1994
- [9] 李建平, 史久恩, 林学椿, 潘一民. 关于 Mann-Kendall 法用于检测气候突变功效的研究. 数理统计与管理(增刊), 1995, 148~153
- [10] 陈希儒. 变点统计分析简介(I)最小二乘法. 数理统计与管理, 1991, (2), 52~59
- [11] 陈希儒. 变点统计分析简介(II)极大似然法, 累计次数法, Bayes 法. 数理统计与管理, 1991, (3), 52~59

DETECTING METHODS ON THE MEAN VALUE JUMP OF THE CLIMATE

Li Jianping¹⁾ Chou Jifan²⁾ Shi Jiuen²⁾

(1) Department of Atmospheric Sciences, Lanzhou University, Lanzhou 730000;

2) Beijing Meteorological College, Beijing 100081)

Abstract This paper is the part I of the series on the statistical methods for the abrupt climatic change, discussing the various detecting methods of mean value jump. The serious shortcoming of Mann-Kendall method is pointed out. The successive moving t-test technique, the least square method and the maximum likelihood method are discussed in detail. The results show that the successive moving t-test technique is a stable, objective, simple and clear detecting method. Moreover, some detecting methods of multivariate mean value jump, such as T^2 -method, M-distance method and the least square method, etc., are given.

Key words abrupt climatic change; mean value jump; successive moving t-test technique